(2) (1)

Διάλεξη 7η Διαφορική Γεωμετρία

04-11-2019

Θεώρημα: (Θεμελιώδες Θεώρημα)

- (Ύπαρξη:) Για τυχαίες λείες συναρτήσεις $\kappa, \tau : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με $\kappa(s) > 0$, $\forall s \in I$ υπάρχει καμπύλη $c : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο το s και καμπυλότητα και στρέψη της δοθείσας συνάρτησης κ, τ.

- (Μοναδικότητα:) Αν $c, \tilde{c}$ καμπύλες του $\mathbb{R}^3$ με φυσική παράμετρο $s \in I$ και ισχύει για την καμπυλότητα του και στρέψη του:
$0 < \kappa(s) = \tilde{\kappa}(s)$, $\forall s \in I$ και $\tau(s) = \tilde{\tau}(s)$, $\forall s \in I$
τότε υπάρχει $T \in Isom(\mathbb{R}^3)$ που διατηρεί τον προσανατολισμό ώστε $\tilde{c} = T \circ c$.

Καμπύλες σταθερής κλίσης:

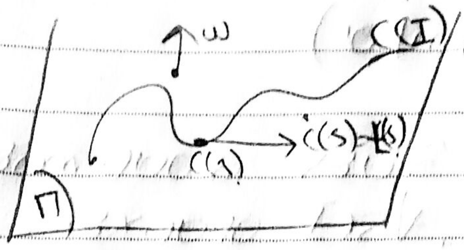
Ορισμός: Μια κανονική καμπύλη (με $\kappa > 0$) του $\mathbb{R}^3$ καλείται καμπύλη σταθερής κλίσης αν-ν όλες οι εφαπτόμενες ευθείες σχηματίζουν σταθερή γωνία ϕ με κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα ω.

Δηλαδή $\langle \omega, \dot{c}(s) \rangle = \cos\phi_0$ $\quad \phi_0 \in (0, \pi)$

Παραδείγματα:

1) **Επίπεδες καμπύλες:**

$c: I \to \mathbb{R}^3$, $c(I) \subseteq \Pi$



Αν $\vec{\omega} \perp \Pi$ και $\|\vec{\omega}\|=1$

τότε $\langle \vec{t}(s), \vec{\omega} \rangle = 0$

$(\Pi): Ax + By + \Gamma z + \Delta = 0$

• $c(s) = (x(s), y(s), z(s))$

$A\, x(s) + B(y(s)) + \Gamma z(s) + \Delta = 0$

$A\, \dot{x}(s) + B\, \dot{y}(s) + \Gamma \dot{z}(s) = 0, \forall s \in I$

$\Leftrightarrow \langle (A, B, \Gamma), \dot{c}(s) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \langle \omega, \vec{t}(s) \rangle = 0$

$\Leftrightarrow \cos \angle(\vec{t}(s), \omega) = \pi/2$

όπου γωνία φ: κλίση

και ω: διεύθυνση

2) **Κυλινδρικές έλικες:** $c: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$,

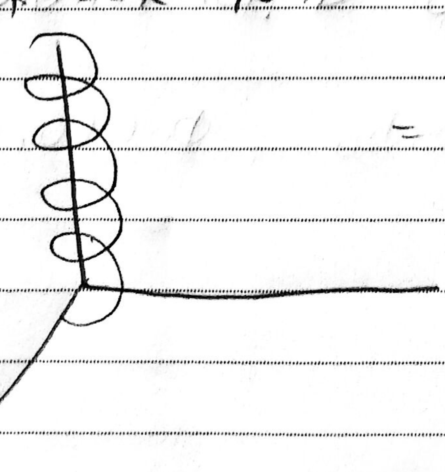
$c(t) = (a\cos t, a\sin t, b(t))$

$a > 0$ και $b \neq 0$

$c'(t) = (-a\sin t, a\cos t, b)$

$\omega = (0, 0, 1)$

$$\cos \angle (c'(t), \omega) = \frac{\langle c'(t), \omega \rangle}{\|c'(t)\| \, \|\omega\|}$$



$$= \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \text{σταθ.}$$

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ καμπύλη σταθερής κλίσης με φυσική παράμετρο, κλίση ϕ και διεύθυνση ω

$$\measuredangle(\vec{t}(s), \omega) = \phi$$

$$\Leftrightarrow \cos \measuredangle(\vec{t}(s), \omega) = \cos\phi$$

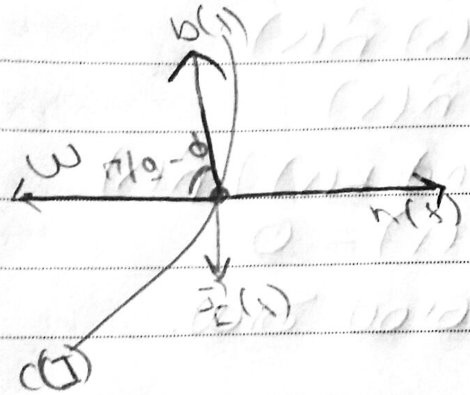
$$\Leftrightarrow \frac{\langle \vec{t}(s), \omega \rangle}{\|\vec{t}(s)\| \|\omega\|} = \cos\phi$$

$$\Leftrightarrow \langle \vec{t}(s), \omega \rangle = \cos\phi \qquad \boxed{\kappa(s) > 0, \ \forall s \in I}$$

Παραγωγίζω $\langle \dot{\vec{t}}(s), \omega \rangle = 0 \Rightarrow$

$$\langle \kappa(s)\vec{n}(s), \omega \rangle = 0 \Leftrightarrow \kappa(s) \langle \vec{n}(s), \omega \rangle = 0$$

$$\overset{\kappa(s)>0}{\Leftrightarrow} \langle \vec{n}(s), \omega \rangle = 0$$



$$\omega = \langle \omega, \vec{t}(s) \rangle \vec{t}(s) + \langle \omega, \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \cos\phi \, \vec{t}(s) + \cos\left(\tfrac{\pi}{2} - \phi\right) \vec{b}(s)$$

$$\Leftrightarrow \omega = \cos\phi \, \vec{t}(s) + \sin\phi \, \vec{b}(s), \ \forall s \in I$$

Παραγωγίζω: $0 = \cos\phi \, \dot{\vec{t}}(s) + \sin\phi \, \dot{\vec{b}}(s) \Rightarrow$

$$\Leftrightarrow 0 = \cos\phi \, \kappa(s) \vec{n}(s) - \sin\phi \, \tau(s) \vec{n}(s)$$

$$\Leftrightarrow 0 = (\cos\phi \, \kappa(s) - \sin\phi \, \tau(s)) n(s), \ \forall s \in I$$

$$\cos\phi \, \kappa(s) = \sin\phi \, \tau(s)$$

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \cot\phi}$$

Θεώρημα: Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ κανονική καμπύλη με καμπυλότητα $\kappa(t) > 0$, $\forall t \in I$.
Η c είναι καμπύλη σταθερής κλίσης $\Leftrightarrow$ $\frac{\tau}{\kappa}$ = σταθερό.

Απόδ.

($\Leftarrow$) Έστω $c(s)$ καμπύλη με $\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \cot\phi$

Ορίζω την διανυσματική συνάρτηση $\omega: I \to \mathbb{R}^3$ με $\omega(s) = \cos\phi\, \vec{t}(s) + \sin\phi\, \vec{b}(s)$

$$\begin{aligned}\dot{\omega}(s) &= \cos\phi\, \dot{\vec{t}}(s) + \sin\phi\, \dot{\vec{b}}(s) \\ &= \cos\phi\, \kappa(s)\vec{n}(s) - \sin\phi\, \tau(s)\vec{n}(s) \\ &= (\cos\phi\, \kappa(s) - \sin\phi\, \tau(s))\, \vec{n}(s) \\ &= (\cos\phi\, \kappa(s) - \sin\phi \cot\phi\, \kappa(s))\, \vec{n}(s) \\ &= \kappa(s)(\cos\phi - \sin\phi \cot\phi)\, n(s) = 0\end{aligned}$$

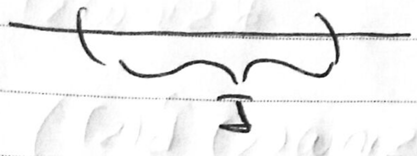
$\Rightarrow \cos\phi\, \vec{t}(s) + \sin\phi\, \vec{b}(s) = \omega$ = σταθ. διαν.

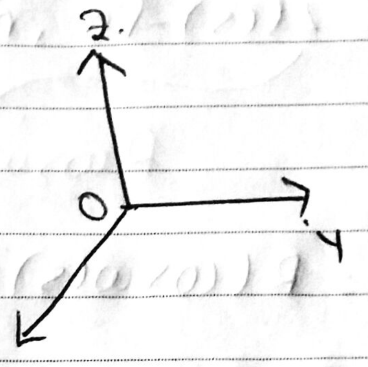
Ποιες καμπύλες έχουν σταθερή στρέψη και σταθερή καμπυλότητα;
↳ είναι οι κύκλοι και οι κυλινδρικές έλικες.

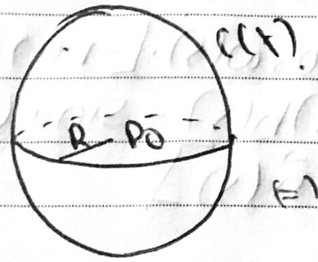
Σφαιρικές Καμπύλες:

Ορισμός: Μια καμπύλη του $\mathbb{R}^3$ καλείται σφαιρική αν-ν η εικόνα της περιέχεται σε σφαίρα.

Έστω $c: I \to \mathbb{R}^3$ σφαιρική καμπύλη με φυσική παράμετρο της οποίας η εικόνα περιέχεται στην σφαίρα με κέντρο P_0 και ακτίνα $R > 0$.







$$\|c(s) - P_0\|^2 = R^2, \forall s \in I$$

$$\Leftrightarrow \langle c(s) - P_0, c(s) - P_0 \rangle = R^2, \forall s \in I$$

παραγωγίζω: $\langle c(s) - P_0, \dot{c}(s) \rangle = 0$

$\frac{d}{ds}$ -ll- : $\langle \dot{c}(s), \dot{c}(s) \rangle + \langle c(s) - P_0, \ddot{c}(s) \rangle = 0$

$$\langle c(s) - P_0, \ddot{c}(s) \rangle = -1$$

$\Rightarrow \kappa(s) = \|\ddot{c}(s)\| > 0$ ΠΑΝΤΟΥ

$$\langle c(s) - P_0, \vec{t}(s) \rangle = 0$$

$$c(s) - P_0 = \langle c(s) - P_0, \vec{n}(s) \rangle \vec{n}(s) + \langle c(s) - P_0, \vec{b}(s) \rangle \vec{b}(s)$$

$$\|c(s) - P_0\|^2 = (\langle c(s) - P_0, n(s) \rangle)^2 + (\langle c(s) - P_0, b(s) \rangle)^2$$

Λήμμα $\Rightarrow$ $\exists$ λεία συνάρτηση τ.ω.

$$\langle c(s) - P_0, \vec{n}(s) \rangle = R\cos\omega(s)$$

$$\langle c(s) - P_0, b(s) \rangle = R\sin\omega(s)$$

Άρα η $\langle c(s)-P_0, \ddot{c}(s)\rangle = -1$, γράφεται ως:

$\langle c(s)-P_0, \kappa(s)n(s)\rangle = -1 \Leftrightarrow$
$\kappa(s)\langle c(s)-P_0, n(s)\rangle = -1 \Leftrightarrow$
$R\kappa(s)\cos\omega(s) = -1 \Leftrightarrow$

$$\kappa(s) = -\frac{1}{R\cos\omega(s)} \Rightarrow \kappa(s) \geq \frac{1}{R}$$

$$c(s)-P_0 = \underbrace{\langle c(s)-P_0, \vec{n}(s)\rangle}_{R\cos\omega(s)}\vec{n}(s) + \underbrace{\langle c(s)-P_0, \vec{b}(s)\rangle}_{R\sin\omega(s)}\vec{b}(s)$$

$$c(s)-P_0 = R(\cos\omega(s)\vec{n}(s) + \sin\omega(s)\vec{b}(s))$$

$$\Rightarrow \vec{t}(s) = R[-\dot{\omega}(s)\sin\omega(s)\vec{n}(s) + \cos\omega(s)\cdot[-\kappa(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s)] + \dot{\omega}(s)\cos\omega(s)b(s) - \sin\omega(s)\tau(s)\vec{n}(s)]$$

$$\Leftrightarrow \vec{t}(s) = -R\kappa(s)\cos\omega(s)\vec{t}(s) - [\dot{\omega}(s)+\tau(s)]\cdot\sin\omega(s)\kappa(s) + (\dot{\omega}(s)+\tau(s))\cos\omega(s)\vec{b}(s)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (\dot{\omega}(s)+\tau(s))\sin\omega(s) = 0 \\ (\dot{\omega}(s)+\tau(s))\cos\omega(s) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{\tau(s) = -\dot{\omega}(s)}$$

$$\boxed{\kappa(s) = -\frac{1}{R\cos\omega(s)}}$$

<u>Πρόταση</u>: Οι μόνες σφαιρικές καμπύλες με σταθερή καμπυλότητα είναι κύκλοι:

<u>Απόδ</u>

Αν $\kappa(s) = -\dfrac{1}{R\cos\omega(s)} = \text{σταθ} \Rightarrow$

$\omega(s) = \text{σταθ.} \Rightarrow \dot{\omega}(s) = 0$

$\Rightarrow \tau(s) = -\dot{\omega}(s) = 0 \Rightarrow c(s)$ είναι επίπεδη

$$c(s) - p_0 = R\left(\cos\omega(s)\, n(s) + \sin\omega(s)\, b(s)\right)$$

$$\kappa(s) = -\frac{1}{R\cos\omega(s)}, \quad \tau(s) = -\dot{\omega}(s)$$

$$\cos\omega(s) = -\frac{1}{R\kappa(s)} \Rightarrow -\dot{\omega}(s)\sin\omega(s) = \frac{1}{R}\frac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^2(s)}$$

$$\Rightarrow \tau(s)\sin\omega(s) = \frac{1}{R}\cdot\frac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^2(s)}$$

$$\Rightarrow R\sin\omega(s) = \frac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}$$

$$\Rightarrow R\dot{\omega}(s)\cos\omega(s) = \left(\frac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)^{\cdot}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\kappa(s)}\dot{\omega}(s) = \left(\frac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)^{\cdot} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = \left(\frac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)^{\cdot}$$

Συμπέρασμα: Αν $c: I \to \mathbb{R}^3$ είναι σφαιρική

$\tau(s) \neq 0$ $\forall s$: $\left(\dfrac{\dot{\kappa}(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}\right)^{\cdot} = \dfrac{\tau(s)}{\kappa(s)}$

Αντίστροφα: Έστω καμπύλη με φυσική παράμ.

μέτρο στρέψη $\tau(s) \neq 0, \forall s \in I$ και

$$\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^{\cdot} = \frac{\tau}{\kappa}.$$

Είναι η c σφαιρική;

$$\left[\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^2 + \frac{1}{\kappa^2}\right]^{\cdot} = 2\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^{\cdot} - 2\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^3}$$

$$= \frac{2\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\cdot\frac{\tau}{\kappa} - \frac{2\dot{\kappa}}{\kappa^3} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^2 + \frac{1}{\kappa^2} = R^2: \text{σταθ.}, \ R>0$$

$$(c(s) - P_0) = \frac{1}{\kappa(s)}\vec{n}(s) + \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^{\cdot}\vec{b}(s)$$

$$c(s) + \frac{1}{\kappa(s)}\vec{n}(s) - \left(\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2\tau}\right)^{\cdot} b(s), \ R>0$$